

面向金属泡沫散热器设计的自然对流拓扑优化

罗纪旺, 陈黎, 郑鑫建, 杨骐瑞, 陶文铨

(西安交通大学热流科学与工程教育部重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 针对传统方块型金属泡沫散热器散热效率不高, 难以满足高功率电子器件散热需求的问题, 发展了基于格子 Boltzmann 和水平集方法的三维拓扑优化方法。首先, 采用格子 Boltzmann 方法求解多孔介质内的流动和传热过程; 然后, 采用伴随格子 Boltzmann 方法计算梯度; 最后, 根据反应-扩散方程更新水平集函数。通过对底部放置发热元件方腔的自然对流过程开展拓扑优化, 得到特征格拉晓夫数为 $2.4 \times 10^2 \sim 1.2 \times 10^5$ 的 4 种优化散热器结构, 定量评估了散热器的强化换热性能并分析相关机理。研究结果表明: 随着格拉晓夫数的增大, 散热主导机制由热传导转变为热对流, 优化结构由伸展的树枝状向收缩的花朵状结构转变, 以留出更多空间使得流动涡旋充分发展; 与传统的金属泡沫方块结构和开槽的金属泡沫块结构相比, 所提优化结构表现出优异的散热性能, 其分支结构和中空结构能够优化方腔内的流动, 从而将散热效率提升了 29.7% 以上, 表明了所提拓扑优化方法的有效性。研究工作可为新型金属泡沫散热器的设计提供理论指导。

关键词: 散热器设计; 强化换热; 伴随格子 Boltzmann 方法; 金属泡沫; 拓扑优化

中图分类号: TK414.2 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202410007 **文章编号:** 0253-987X(2024)10-0072-11

Design of Metal Foam Heat Sinks Guided by the Topology Optimization of Natural Convection

LUO Jiawang, CHEN Li, ZHENG Xinjian, YANG Qirui, TAO Wenquan

(Key Laboratory of Thermo-Fluid Science and Engineering of MOE, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: To overcome the challenges of low heat dissipation efficiency in traditional block-type metal foam heat sinks and their inability to meet the cooling requirements of high-power electronic devices, a three-dimensional topology optimization method based on the lattice Boltzmann and level set methods is developed. Firstly, the lattice Boltzmann method is employed to simulate the flow and heat transfer processes within the porous medium. Then, the adjoint lattice Boltzmann method is used to calculate the gradients. Finally, the level set function is updated based on the reaction-diffusion equation. By conducting topology optimization of the natural convection process in a square cavity with heat-generating elements at the bottom, four optimized heat sink structures with characteristic Grashof numbers ranging from 2.4×10^2 to 1.2×10^5 are obtained. The enhanced heat transfer performance of the heat sinks is quantitatively evaluated, and the underlying mechanisms are analyzed. The research findings indicate that as the Grashof number increases, the dominant heat

收稿日期: 2024-01-22。 作者简介: 罗纪旺(1997—), 男, 博士生; 陈黎(通信作者), 男, 教授, 博士生导师。

基金

项目: 国家自然科学基金资助项目(52376074)。

网络出版时间: 2024-06-05

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/61.1069.T.20240605.1017.002>

transfer mechanism shifts from conduction to convection. The optimized structures transform from extended branching patterns to compact flower-like structures, creating additional space for the development of more flow vortices. Compared with traditional block-shaped metal foam structures and slotted metal foam block structures, the proposed optimized structures demonstrate superior heat dissipation performance. The branch structures and hollow structures optimize the flow within the cavity, resulting in an improvement in heat dissipation efficiency of over 29.7%. These results highlight the effectiveness of the proposed topology optimization method and provide theoretical guidance for the design of novel metal foam heat sinks.

Keywords: heat sink design; enhanced heat transfer; adjoint lattice Boltzmann method; metal foam; topology optimization

日益增长的芯片功率密度对当前热管理技术提出了极大挑战,使用多孔金属泡沫强化换热正在受到越来越多研究人员的关注。金属泡沫是一类包含高导热系数金属骨架和大量连通孔隙的多孔介质,具有低密度、高比表面积及高导热系数等优点,被广泛应用于强化单相强制对流换热、单相自然对流换热、池沸腾及流动沸腾换热等换热过程^[1]。早在 21 世纪初,金属泡沫就被应用于强化电子器件自然对流冷却相关方向。Mahdi 等^[2]发现将铝金属泡沫作为 CPU 散热器,可在传统翅片散热器基础上进一步将总热阻降低 70%。此后,研究人员深入研究了影响金属泡沫散热性能的主要因素,如泡沫孔密度、样品高度及长-宽-高比、摆放倾角、开槽宽度等,并优化了金属泡沫结构强化散热效果^[1]。然而,在上述研究中,参数化研究所获得的优化参数或结构并不能使金属泡沫的拓扑结构发生根本改变,因而难以获得能使散热性能大幅提升的散热器结构。

拓扑优化是获得高性能优化结构设计的一种可靠方法,其基本思想是求解给定设计域内的材料最优分布问题。拓扑优化最早起源于结构力学,经过 30 余年的快速发展,已被应用于流体力学及传热学^[3-5]。一般而言,拓扑优化方法根据其结构表征可以分为密度法和水平集法两类,前者使用与多孔介质类似的具有中间物性值的过渡材料代替不连续界面^[6],后者则引入高维水平集函数(LSF)的 0 等值线来表征材料的分布^[7]。2003 年, Borrvall 和 Petersson^[8]首次将拓扑优化应用于求解以降低耗散功率为目标的 Stokes 流动优化问题,开创了流动问题拓扑优化研究的先河。随后, Yoon^[9] 和 Dede^[10]几乎同时将基于密度法的拓扑优化拓展到流动传热领域,用以获得高效强制对流换热器结构。

由于自然对流过程的强耦合和强非线性特点,关于自然对流的拓扑优化研究起步较晚。2014 年, Alexandersen 等^[11]首次开展了二维自然对流过程的拓扑优化研究,获得了不同格拉晓夫数下的散热器结构。随后,他们进一步开展了相关的三维拓扑优化研究,获得了可以兼顾提升散热性能和降低材料消耗的散热器结构^[12]。Coffin 等^[13]和 Li 等^[14]采用基于水平集方法的拓扑优化方法,获得了二维及三维的优化散热器结构。需要指出的是,上述研究获得的优化散热器结构均由固体金属而非金属泡沫制成。考虑到金属泡沫在增加比表面积、减少散热器质量、降低金属材料消耗成本等方面的巨大优势,基于金属泡沫强化自然对流的拓扑优化研究亟待开展。

在以往的拓扑优化研究中,一般使用直接离散求解 Navier-Stokes 方程的宏观方法,如有限元法(FEM)及有限体积法(FVM),进行数值模拟及相关优化研究,仅有少部分研究选择基于气体动理论的格子 Boltzmann 方法(LBM)。以往的研究表明,LBM 法具有计算效率高、并行性好、处理复杂界面能力强等优点,因此被广泛应用于多孔介质流及多相流等问题^[15]。在拓扑优化中,除了直接对所关心的物理问题进行仿真外,还需求解目标函数关于设计变量的梯度以驱动优化算法寻得优化解,因此通常还需求解额外的伴随方程以简化梯度计算。在以 LBM 为基础的拓扑优化方法中,这种求解伴随方程策略也被称为伴随 LBM(ALBM)。2007 年, Pingen 等^[16]率先将 LBM 和 ALBM 法应用于流体流动拓扑优化,成功复现了文献[8]的结果。接着,他们将提出的方法应用于非牛顿流体流动以及流动换热过程的拓扑优化。然而,在他们提出的方法中,必须要组装整个系统的 Jacobian 矩阵并求其逆矩阵,实际

上与 LBM 法计算简洁的特性背道而驰,由于优化算法的求解效率大大降低,所以难以被应用于大尺度拓扑优化求解。2013 年,Krause 等^[17]提出了基于连续 Boltzmann 方程的 ALBM 法,推导得到的伴随方程与原始 Boltzmann 方程具有相似的形式,可以进一步采用类似 LBM 法的离散格式求解,从而很好地保持了 LBM 法的诸多优点。随后,Yaji 等^[18]基于连续 Boltzmann 方程导出了 ALBM 方程并建立了相应的伴随边界格式。后来,Yaji 等^[19]又提出了另一种基于速度离散 Boltzmann 方程的 ALBM 法,可以引入常用的边界格式(如 Zou-He 格式)推导伴随方程。在 Yaji 等工作的基础上,Dugast 等^[20]提出了一种新的 ALBM 推导策略,并引入多松弛时间(MRT)LBM 法来提高伴随计算的稳定性。近期,Luo 等^[21-22]和 Tanabe 等^[23]分别通过发展相应的 ALBM 模型,获得了自然对流过程的二维及三维拓扑优化结构,再次证明了 LBM 法对于复杂多物理场拓扑优化的适用性和独特优势。

在 Luo 等^[24]近期的研究中,首次提出了自然对流系统内基于 LBM 的金属泡沫散热器拓扑优化方法,并获得了多个参数组合下的二维拓扑优化结构。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_0 & \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_4 & \mathbf{c}_5 & \mathbf{c}_6 & \mathbf{c}_7 & \mathbf{c}_8 & \mathbf{c}_9 & \mathbf{c}_{10} & \mathbf{c}_{11} & \mathbf{c}_{12} & \mathbf{c}_{13} & \mathbf{c}_{14} & \mathbf{c}_{15} & \mathbf{c}_{16} & \mathbf{c}_{17} & \mathbf{c}_{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

τ_f 为与速度分布函数 f 及流体有效黏度 ν_e 相关的无量纲松弛时间

$$\nu_e = \frac{1}{3}(\tau_f - 0.5) \quad (3)$$

f_i^{eq} 为平衡态分布函数,对于多孔介质流动可表示为

$$f_i^{\text{eq}} = \omega_i \rho \left[1 + 3(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}) + \frac{9}{2\epsilon}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2\epsilon} \mathbf{u}^2 \right] \quad (4)$$

其中, ϵ 为多孔介质的当地孔隙率; ρ 、 $\mathbf{u}$ 分别为流体密度和速度矢量,可由分布函数 f_i 的零阶矩和一阶矩表示为

$$\rho = \sum_{i=0}^8 f_i; \quad \rho \mathbf{u} = \sum_{i=0}^8 \mathbf{c}_i f_i \quad (5)$$

ω_i 为权重系数,D3Q19 模型的 ω_i 可写为

$$\omega_i = \begin{cases} 1/3, & i = 0 \\ 1/18, & i = 1 \sim 6 \\ 1/36, & i = 7 \sim 18 \end{cases} \quad (6)$$

F_i 为离散外力项,可表示如下

$$F_i = \omega_i \rho \left\{ 3\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{F} + \left(1 - \frac{1}{2\tau_f} \right) \cdot \left(\frac{9}{\epsilon}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{F}) - \frac{3}{\epsilon}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}) \right) \right\} \quad (7)$$

基于此,本文针对金属泡沫散热器的三维拓扑优化,采用基于 ALBM 及水平集法的拓扑优化方法,获得了不同格拉晓夫数下金属泡沫散热器的最优结构,分析了强化传热百分比及相关强化传热机理,并与传统金属及开槽金属泡沫方块进行对比。该研究工作为金属泡沫散热器结构优化设计提供了新的技术途径,也为新一代轻质高效多孔介质结构优化设计提供了理论指导。

1 格子 Boltzmann 模型

1.1 流动 LBM 模型

本文采用 Guo 等^[25]发展的多孔介质流动格子 Boltzmann 模型,模拟孔隙及多孔介质内的流动。在 LBM 模拟中,对碰撞项采用 BGK 碰撞模型近似后,分布函数的演化表达式可写为

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla f_i = -\frac{1}{\tau_f}(f_i - f_i^{\text{eq}}) + F_i \quad (1)$$

式中: $\mathbf{c}_i$ 为表征离散空间方向的向量,也被称为离散速度; f_i 为空间 $\mathbf{x}$ 点处、 t 时刻、 $\mathbf{c}_i$ 方向上的速度分布函数,对于三维流动,通常采用 D3Q19 模型所规定的 19 个离散速度表示

其中, $\mathbf{F}$ 为外力项向量,对于本文中研究的多孔介质内的自然对流过程,可表示为 Darcy 阻力项、Forchheimer 阻力项以及 Boussinesq 假设确定的浮升力项三者之和

$$\mathbf{F} = -\frac{\epsilon \nu_f}{k} \mathbf{u} - \frac{\epsilon F_\epsilon}{\sqrt{k}} |\mathbf{u}| \mathbf{u} - \epsilon \beta \mathbf{g} (T - T_0) \quad (8)$$

其中, ν_f 为流体黏度; k 为渗透率; F_ϵ 为形状因子; β 为体积膨胀系数; $\mathbf{g}$ 为重力加速度向量; T 为温度; T_0 为参考温度。

对于本文求解的封闭腔内自然对流过程,四周及上、下壁均为无滑移壁面,因此采用标准反弹格式

$$f_{i,(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{n} < 0)} = f_{i,(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{n} > 0)} \quad (9)$$

1.2 传热 LBM 模型

通过求解速度分布函数 f 获得密度和速度后,引入温度分布函数 g 求解温度场。温度分布函数的演化方程^[26]与式(1)相类似

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla g_i = -\frac{1}{\tau_g}(g_i - g_i^{\text{eq}}) + \omega'_i S \quad (10)$$

式中: $\mathbf{c}_i$ 仍为离散速度,对于求解能量守恒方程这类被动标量方程,可采用更少的离散速度,这里采用

D3Q7 模型,即仅采用式(2)的前 7 个离散速度; S 为热源项; τ_g 为与温度分布函数 g 相关的无量纲松弛时间,可由有效热扩散系数 $a_e = \sigma_0(\tau_g - 0.5)/3$ 确定,其中 σ_0 为有效比热与流体比热之比的参考值; g_i^{eq} 为平衡态分布函数,可写为

$$g_i^{\text{eq}} = \begin{cases} T(\sigma - \sigma_0) + \omega'_i T(\sigma_0 + 4\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}), & i = 0 \\ \omega'_i T(\sigma_0 + 4\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}), & i = 1 \sim 6 \end{cases} \quad (11)$$

其中, σ 为有效比热与流体比热之比; ω'_i 为 D3Q7 模型的权重系数,取值如下

$$\omega'_i = \begin{cases} 1/4, & i = 0 \\ 1/8, & i = 1 \sim 6 \end{cases} \quad (12)$$

温度 T 可通过对 g 求和获得,表示为

$$T = \sum_{i=0}^6 g_i \quad (13)$$

至于热边界条件,除底面为绝热壁面外,四周及顶壁均为温度为 0 的恒温壁面。绝热壁面处采用与式(9)类似的反弹边界,恒温壁面处采用如下边界格式(以顶壁为例)

$$g_6 = T_0 - g_0 - g_1 - g_2 - g_3 - g_4 - g_5 \quad (14)$$

求解 1.2 小节中的流动模型及 1.3 小节中的传热模型,实际上相当于求解如下质量守恒方程、多孔介质流动量守恒方程及多孔介质流能量守恒方程^[24]

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} = -\frac{1}{\rho} \nabla(\varepsilon p) + \nabla \cdot (\nu_e \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{F} \\ \sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (T \mathbf{u}) = \nabla \cdot (a_e \nabla T) + S \end{cases} \quad (15)$$

式中: p 为压力。

将式(15)所述方程无量纲化,可得到控制多孔介质自然对流的无量纲数,分别为达西数 Da 、普朗特数 Pr 、格拉晓夫数 Gr 以及热扩散系数比 γ ,定义为

$$\begin{cases} Da = \frac{k}{h^2}; Pr = \frac{\nu_f}{a_f} \\ Gr = \frac{\beta |g| (T_s - T_0) h^3}{\nu_f^2}; \gamma = \frac{a_e}{a_f} \end{cases} \quad (16)$$

式中: h 为特征高度; T_s 为发热元件的平均温度; a_f 为流体热扩散系数。

2 拓扑优化模型

2.1 优化问题定义

一般地,拓扑优化问题可视为给定设计域内的

材料分布优化问题。对于本文中待解的金属泡沫散热器拓扑优化问题,需要优化金属泡沫的结构设计,其中金属泡沫作为单一多孔材料应具有恒定的孔隙率和恒定的有效输运系数。换言之,我们需要确定设计域内金属泡沫和纯流体两种材料在空间中的最优分布,因此可采用如下特征方程表述

$$\chi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \text{ 为金属泡沫点} \\ 1, & \mathbf{x} \text{ 为纯流体点} \end{cases} \quad (17)$$

由于上述特征函数高度不连续,导致所定义的优化问题是病态的,所以进一步采用连续的水平集函数 $\varphi(\mathbf{x})$ 的 0 等值面表征金属泡沫与流体的界面,写为

$$\begin{cases} 0 < \varphi(\mathbf{x}) \leq 1, & \mathbf{x} \text{ 为纯流体点} \\ \varphi(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \text{ 在界面处} \\ -1 \leq \varphi(\mathbf{x}) < 1, & \mathbf{x} \text{ 为金属泡沫点} \end{cases} \quad (18)$$

由此,特征方程与水平集函数间的映射关系可表示如下

$$\chi_\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & -1 \leq \varphi(\mathbf{x}) < 0 \\ 1, & 0 \leq \varphi(\mathbf{x}) \leq 1 \end{cases} \quad (19)$$

式中: χ_φ 为设计变量。

根据上述材料分布的定义,整个拓扑优化问题^[24]可表述为

$$\begin{cases} \min_{\chi_\varphi} (J + R) = \frac{1}{2V_0} \int_{X_0} T^2 dX + \frac{1}{2} \kappa \int_{X_1} |\nabla \varphi|^2 dX \\ \begin{cases} G = \int_{X_1} (1 - \chi_\varphi) dX - V_{\max} \int_{X_1} dX \leq 0 \\ \text{s. t.} \begin{cases} \frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla f_i = -\frac{1}{\tau_f} (f_i - f_i^{\text{eq}}) + F_i \\ \frac{\partial g_i}{\partial t} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla g_i = -\frac{1}{\tau_g} (g_i - g_i^{\text{eq}}) + \omega'_i S \end{cases} \end{cases} \end{cases} \quad (20)$$

式中: J 为目标函数,定义为发热区域 X_0 平均温度的平方; V_0 为 X_0 的体积; X_1 为设计域; R 为 Tikhonov 正则项; κ 为正则化系数; G 为体积约束; $V_{\max}$ 为给定金属泡沫体积分数的上限。

需要指出的是,式(1)和式(10)作为优化问题的等式约束,隐式地规定了设计变量 χ_φ 与状态变量 f, g 之间的函数关系,该函数关系可通过拓展表示如下

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla f_i = & -\frac{1}{\tau_f} \{f_i - f_i^{\text{eq}}[\rho(f), \mathbf{u}(f), \varepsilon(\chi_\varphi)]\} + \\ & F_i[\rho(f), \mathbf{u}(f), T(g), \varepsilon(\chi_\varphi), k(\chi_\varphi)] \end{aligned} \quad (21)$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla g_i = -\frac{1}{\tau_g(\chi_\varphi)} \{g_i - g_i^{\text{eq}}[\mathbf{u}(f), T(g)]\} + \omega'_i S \quad (22)$$

其中,孔隙率 ε 、渗透率 k 和松弛时间 τ_g 与设计变量 χ_φ 间的关系可采用材料物性理性近似格式表示

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon(\chi_\varphi)} = \frac{1}{\varepsilon_f} + \left(\frac{1}{\varepsilon_p} - \frac{1}{\varepsilon_f}\right) \frac{q_1(1-\chi_\varphi)}{q_1 + \chi_\varphi} \\ \frac{1}{k(\chi_\varphi)} = \frac{1}{k_f} + \left(\frac{1}{k_p} - \frac{1}{k_f}\right) \frac{q_1(1-\chi_\varphi)}{q_1 + \chi_\varphi} \\ \frac{1}{\tau_g(\chi_\varphi)} = \frac{1}{\tau_{g,f}} + \left(\frac{1}{\tau_{g,p}} - \frac{1}{\tau_{g,f}}\right) \frac{q_2(1-\chi_\varphi)}{q_2 + \chi_\varphi} \end{cases} \quad (23)$$

其中,下标 f, p 分别代表纯流体点和多孔介质点; q_1 和 q_2 为不同插值项的惩罚系数。

2.2 反应-扩散方程

在优化迭代过程中,水平集函数及其对应的特征函数不断更新,从初始结构逐步演化为优化结构。这一演化是由最速下降法驱动的,对式(20)中定义的目标函数求导,可得到如下反应-扩散方程形式的结构演化方程

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -K(\nabla J - \kappa \nabla^2 \varphi) \quad (24)$$

式中: K 为步长; ∇J 为目标函数 J 关于水平集函数 $\varphi(\mathbf{x})$ 的梯度。

本研究中,采用伴随方法求解得到梯度,即通过求解额外的辅助变量(伴随变量)简化梯度的计算。具体来说,通过拉格朗日乘子法构造如下拉格朗日函数

$$\begin{aligned} L(f_i^*, f_i, g_i^*, g_i, \chi_\varphi, \lambda) &= J(g_i) + \\ R_1(f_i^*, f_i, g_i, \chi_\varphi) &+ R_2(g_i^*, g_i, f_i, \chi_\varphi) + \lambda G(\chi_\varphi) \end{aligned} \quad (25)$$

式中: λ 为体积约束的拉格朗日乘子; R_1 和 R_2 均为约束项,定义为伴随变量 f_i^* 及 g_i^* 与相应等式约束的内积,表达式如下

$$R_1 =$$

$$\iint_{0X} \sum_{i=0}^{18} f_i^* \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla f_i + \frac{1}{\tau_f} (f_i - f_i^{\text{eq}}) - F_i \right\} dX dt \quad (26)$$

$$R_2 =$$

$$\iint_{0X} \sum_{i=0}^6 g_i^* \left\{ \frac{\partial g_i}{\partial t} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla g_i + \frac{1}{\tau_g} (g_i - g_i^{\text{eq}}) - \omega'_i S \right\} dX dt \quad (27)$$

式中: t_f 为达到稳态所需的时间; X 为计算域。

根据之前的研究^[18],若伴随变量满足如下形式的伴随方程

$$\frac{\partial L}{\partial f} \delta f = \frac{\partial R_1}{\partial f} \delta f + \frac{\partial R_2}{\partial f} \delta f = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial L}{\partial g} \delta g = \frac{\partial J}{\partial g} \delta g + \frac{\partial R_1}{\partial g} \delta g + \frac{\partial R_2}{\partial g} \delta g = 0 \quad (29)$$

那么梯度 ∇J 就可简化为

$$\nabla J = \frac{dJ}{d\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \chi_\varphi} = \frac{\partial R_1}{\partial \chi_\varphi} + \frac{\partial R_2}{\partial \chi_\varphi} + \lambda \frac{\partial G}{\partial \chi_\varphi} \quad (30)$$

下面将对伴随方程和梯度表达式的具体形式做详细介绍。

2.3 伴随模型和梯度计算

由于本文中使用的LBM模型与我们之前工作中的LBM模型是一致的,仅在离散速度的具体取值上有差别,所以相应的伴随方程的推导过程也完全一致。本文将不再详细展开相应的推导过程,仅对伴随方程本身及其求解过程作详细介绍,对推导过程感兴趣的读者可以参考文献[24]。将式(28)和(29)展开,逐项推导可得到对应的伴随方程,分别表示如下

$$\begin{aligned} -\frac{\partial f_i^*}{\partial t} - \mathbf{c}_i \cdot \nabla f_i^* + \frac{1}{\tau_f} \left(f_i^* - \sum_{j=0}^{18} f_j^* \frac{\partial f_j^{\text{eq}}}{\partial f_i} \right) - \\ \sum_{j=0}^{18} f_j^* \frac{\partial F_j}{\partial f_i} - \frac{1}{\tau_g} \sum_{k=0}^6 g_k^* \frac{\partial g_k^{\text{eq}}}{\partial f_i} = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial g_i^*}{\partial t} - \mathbf{c}_i \cdot \nabla g_i^* + \frac{1}{\tau_g} \left(g_i^* - \sum_{k=0}^6 g_k^* \frac{\partial g_k^{\text{eq}}}{\partial g_i} \right) - \\ \sum_{j=0}^{18} f_j^* \frac{\partial F_j}{\partial g_i} + \frac{T}{V_0^2} \Big|_{t=t_f} = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

上述伴随方程的边界条件可由式(28)和(29)展开得到。例如,对于无滑移壁面的反弹格式,相应的伴随边界条件为

$$f_{i, \langle \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{n} > 0 \rangle}^* = f_{i, \langle \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{n} < 0 \rangle}^* \quad (33)$$

对于式(14)所示的恒温壁面边界格式,伴随边界格式如下

$$g_{i, \langle \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{n} > 0 \rangle}^* = -g_{i, \langle \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{n} < 0 \rangle}^* \quad (34)$$

此外,伴随方程的初始条件也可一并得到

$$f_i^*|_{t=t_f} = 0; g_i^*|_{t=t_f} = 0 \quad (35)$$

上述伴随方程、边界条件以及初始条件,一并构成了完整的伴随模型。在时间和空间上采用与LBM法类似的一阶显式格式离散伴随方程式(31)及(32),可得到对应的伴随格子 Boltzmann 方程。进一步通过依次实施伴随碰撞、伴随迁移和伴随边界条件,可求解得到伴随分布函数 f^* 和 g^* ,这种方

法即被称为 ALBM 法。

进一步展开式(30),得到梯度的表达式

$$\begin{aligned} \nabla J = & -\lambda + \sum_{k=0}^6 g_k^* (g_k - g_k^{\text{eq}}) \frac{\partial (1/\tau_g)}{\partial \chi_\varphi} \\ & + \sum_{j=0}^{18} f_j^* \left[-\frac{1}{\tau_f} \frac{\partial f_j^{\text{eq}}}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial \chi_\varphi} - \left(\frac{\partial F_j}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial \chi_\varphi} + \frac{\partial F_j}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \chi_\varphi} \right) \right] \end{aligned} \quad (36)$$

上式中的各个偏导数项可通过式(21)~(22)的函数关系,以及第 1 节中的相应表达式计算得到其显式表达式,无须采用迭代算法求解。由此发现,在使用伴随方法后,梯度 ∇J 实际上是相应的分布函数 f 、 g ,以及伴随分布函数 f^* 、 g^* 的显式表达式。一旦通过 LBM 法求解得到了 f 、 g ,再通过 ALBM 法求解得到 f^* 和 g^* ,就可以快捷地计算得到梯度 ∇J 。式(36)中的拉格朗日乘子 λ 用于准确实施体积约束^[27],计算公式可写为

$$\lambda = \frac{\int_{x_1} |\nabla J - \kappa \nabla^2 \varphi| dX}{\int_{x_1} dX} e^G \quad (37)$$

在获得梯度后,即可根据“反应-扩散”方程更新设计域内的结构设计,而后进入下一步优化迭代。总体的优化算法流程如图 1 所示,并可概述如下:
①首先给定设计域内的初始结构;
②通过求解式(1)和(10)求解自然对流传热过程,得到 f 和 g 的解;
③通过求解式(31)和(32)求解伴随方程,得到 f^* 和 g^* 的解;
④通过式(36)基于当前 f 、 g 以及 f^* 、 g^* 计算梯度;
⑤根据式(24)的反应-扩散方程更新水平集函数,基于更新后的水平集函数使用式(19)更新结构;
⑥重复步骤②~⑤直至优化结构及目标函数收敛,得到最终的优化结构。

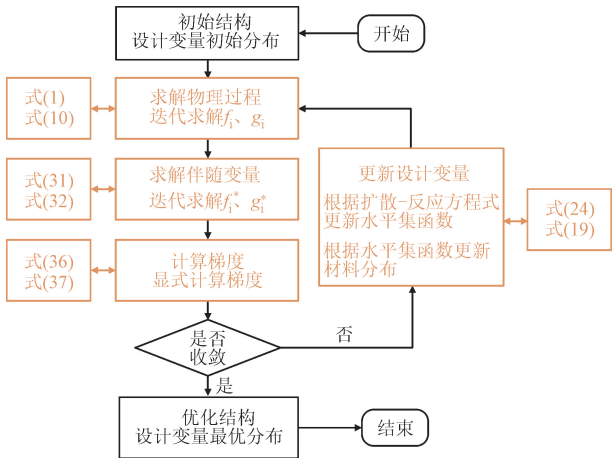


图 1 拓扑优化算法流程图

Fig. 1 Flowchart of the topology optimization algorithm

由于本文是文献[24]二维金属泡沫拓扑优化工作的直接拓展,相关数值模型和优化算法的验证已在其中展示,有兴趣的读者可以参考文献[24]。

3 结果与讨论

本文中,自然对流拓扑优化问题的设置如图 2 所示,放置尺寸为 $16 \times 16 \times 8$ (格子单位)的发热元件(固体加热域)于底部绝热壁面的正中央,令其具有 $S=0.1$ (格子单位)的恒定均匀体热源。加热域正上方为 $112 \times 112 \times 80$ 的设计域,内可放置由金属泡沫材料制成的散热器,用以冷却发热元件。计算域整体尺寸为 $160 \times 160 \times 160$,除底面外,四周及顶部均为 $T_0=0^\circ\text{C}$ 的冷壁面。计算域内填充的空气作为换热介质,在加热域与冷壁面间温差的作用下,受热体积膨胀,密度减小而产生浮力,将在计算域内形成自然对流,加速发热元件与冷壁面间的热交换。上述几何、网格及工况设置均参考文献[22],相关网格独立性的讨论也已在其中说明。需要指出的是,由于开放边界下要求设计域外有更大的外部空间^[28],本文采用与设计域存在适当距离的低温壁面代替外部大空间以减少计算量。

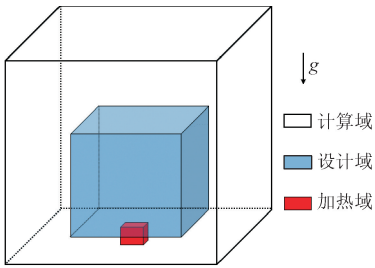


图 2 自然对流拓扑优化计算域示意图

Fig. 2 Schematic of the computational domain in the natural convection topology optimization

上述计算域内自然对流过程的控制方程由式(15)给出。由式(15)可知,控制上述自然对流过程的无量纲数分别为达西数 Da 、普朗特数 Pr 、格拉晓夫数 Gr 和热扩散系数比 γ 。本文中,由于介质为空气,普朗特数 $Pr=0.692$;采用文献[29]中的金属泡沫样品,达西数 $Da=1.38 \times 10^{-5}$;热扩散系数比 $\gamma=114.1$ 。格拉晓夫数 Gr 定义为浮升力与黏性力之比,可用于确定自然对流过程中传热的主导机制。当 Gr 较小时,浮升力也较小,计算域内流体流速较低,对流传热较弱,发热元件与冷

壁面间主要依靠热传导进行换热;当 Gr 较大时,较大的浮升力使得流体快速在发热元件与冷壁面间循环流动,形成多个大的涡旋,强化了对流传热,热对流取代热传导成为传热主导机制。通过改变体积膨胀系数 β ,对多个 Gr 下的自然对流过程进行拓扑优化,得到不同换热主导机制下的优化散热器结构。

值得指出的是,由于本文考虑的自然对流过程相对应的 Gr 在 $10^2 \sim 10^5$ 之间,因而可获得相应的稳态层流解,加之问题的对称性,实际采用的计算区域仅为图2的 $1/4$,且在计算域内部的切割面上使用对称边界条件。为了避免设计域内全部填充金属泡沫的平凡解,设置金属泡沫填充的体积分数上限 $V_{\max}$ 为 0.1。

通过调节体积膨胀系数 β ,可以改变对流换热强度,进而可以在优化完成后通过式(16)后验计算相应的 Gr 。为呈现不同传热主导机制下的优化结构, β 分别取 1×10^{-9} 、 1×10^{-8} 、 1×10^{-7} 和 1×10^{-6} ,对应的 Gr 分别为 2.4×10^2 、 2.3×10^3 、 1.7×10^4 和

1.2×10^5 。为了评估本文所提优化散热器结构对强化自然对流传热的效果,以 2 种传统结构作为参考结构进行对比分析。参考结构 1 为常用的金属泡沫方块结构,参考结构 2 为开槽的金属泡沫块结构。为了保证比较的公平性,方块结构的尺寸为 $56 \times 56 \times 32$,开槽金属泡沫块的翅片尺寸为 $6 \times 66 \times 33$,这使得 2 种参考结构的金属泡沫填充体积与优化结构相等。在后续进行的参考结构自然对流仿真中,由于特征温差变化,导致实际的 Gr 并不完全与上述 4 个特征 Gr 相等,但这种变化不影响定性分析,因此为了分析方便,本文始终选取上述 4 个特征 Gr 进行后续讨论。

采用第 1、2 节中发展的拓扑优化方法对设计域内金属泡沫材料的分布进行拓扑优化,得到不同 Gr 下优化后的散热器结构。图 3、图 4 分别给出了优化结构及 2 种参考结构的速度和温度分布对比。优化结构及参考结构 2 在计算域内沿着 z 方向中心线上的速度和温度分布由图 5 给出。对应的 T_s 列于表 1。

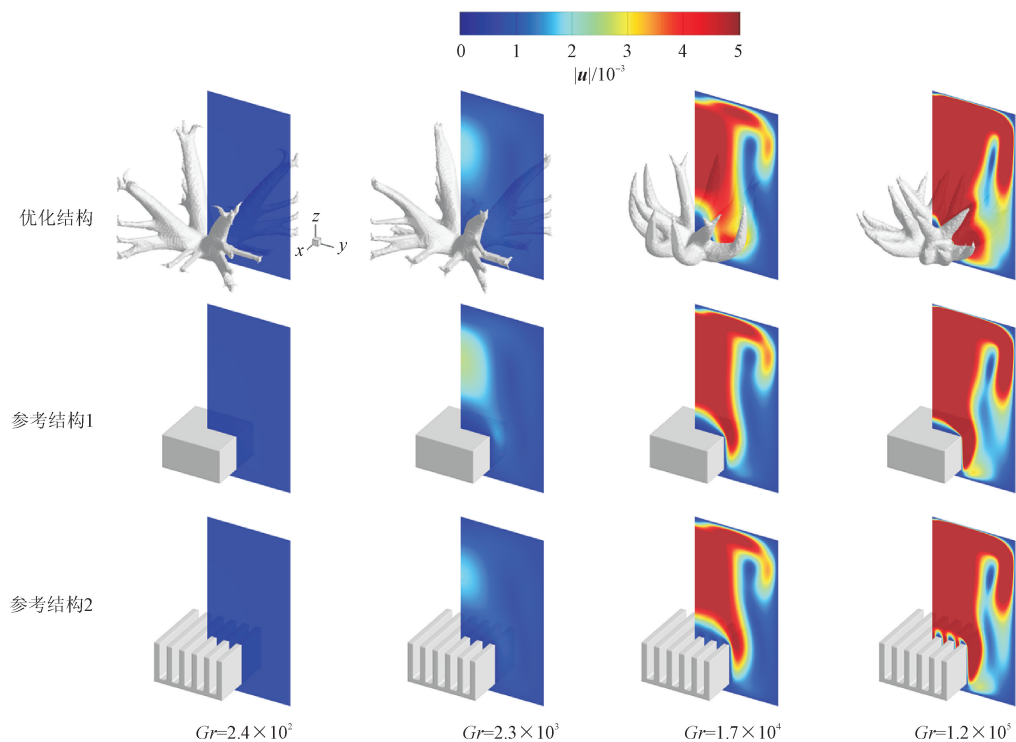


图3 不同 Gr 下优化结构及 2 种参考结构的速度分布对比

Fig. 3 Comparison of velocity distributions of the optimized designs and two reference designs under different Gr

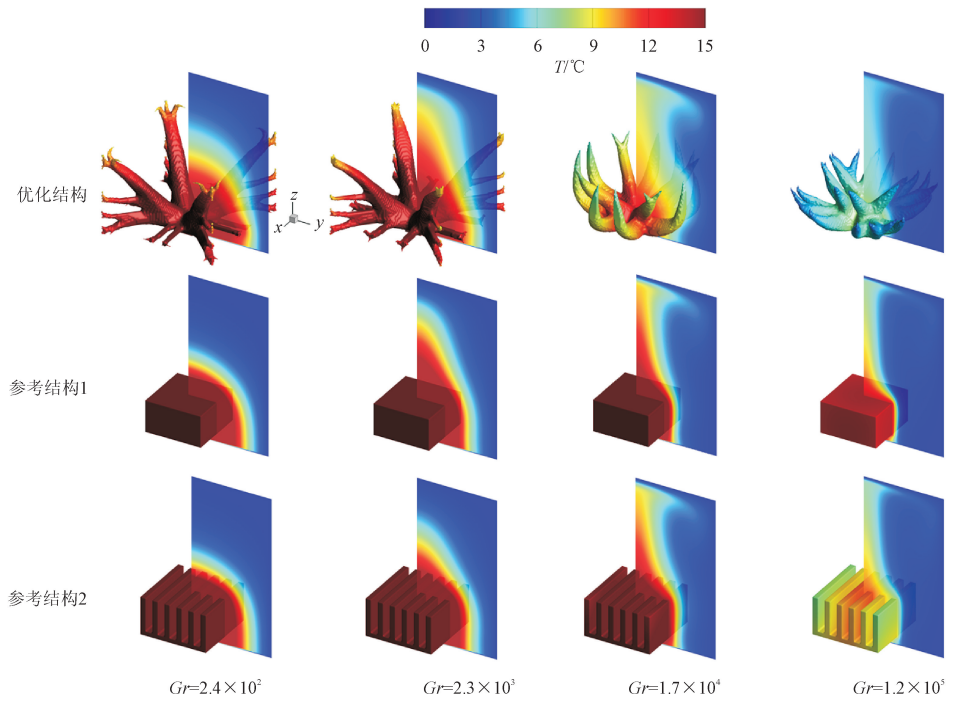


图 4 不同 Gr 下优化结构及 2 种参考结构的温度分布对比

Fig. 4 Comparison of temperature distributions of the optimized designs and two reference designs under different Gr

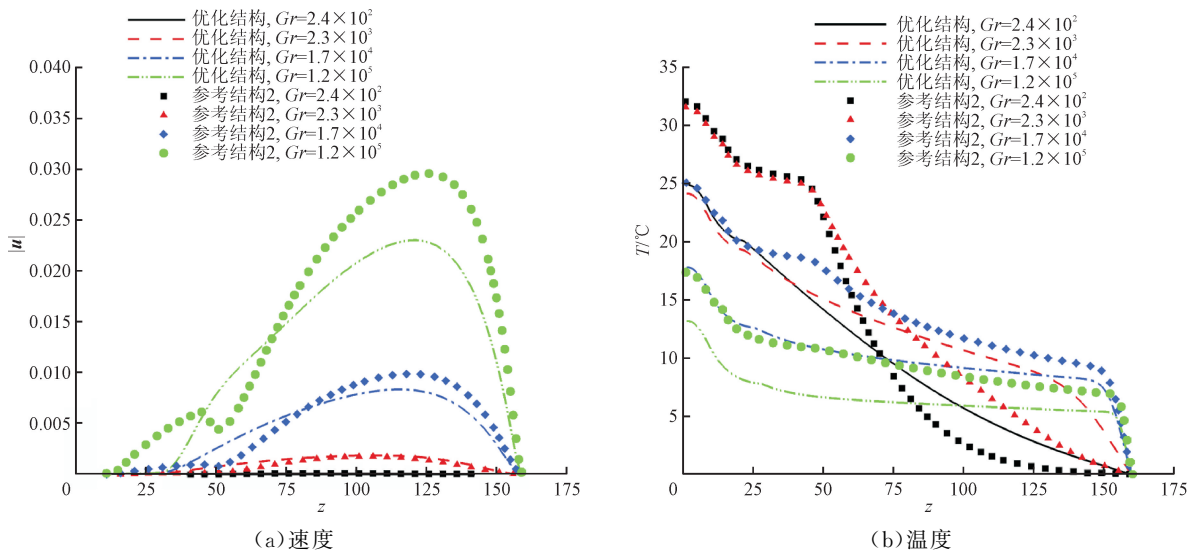


图 5 不同 Gr 下优化结构及参考结构 2 沿着 z 方向中心线上的速度和温度分布

Fig. 5 Velocity and temperature distributions of the optimized designs and the reference design 2 along the central line of z direction under different Gr

表 1 不同 Gr 下优化结构及参考结构的 T_s
Table 1 T_s values of the optimized designs and reference designs under different Gr

Gr	$T_s/^\circ\text{C}$		
	优化结构	参考结构 1	参考结构 2
2.4×10^2	21.04	31.92	27.29
2.3×10^3	20.38	30.76	26.88
1.7×10^4	14.84	22.91	21.15
1.2×10^5	10.81	16.32	14.46

由图 3~图 5 及表 1 可知,随着 Gr 增加,计算域内的流体流速显著增加,发热元件及散热器本身的温度均有明显下降。观察各个 Gr 下的优化散热器结构可以发现,当 Gr 低至 2.4×10^2 时,优化结构呈现复杂的树枝状,由指向计算域对角线方向的主分支和一系列次级分支构成,可将发热元件产生的热量传导至周围冷壁面。当 Gr 从 2.4×10^2 增加至 2.3×10^3 时,优化结构变化不明显,仅一部分细小

分支结构呈现萎缩趋势,此时虽然流速有所增加,但仍主要靠导热传热,上述 2 种情况对应的目标函数值相差不大。然而,当 Gr 从 2.3×10^3 增加至 1.7×10^4 时,优化结构明显收缩,形成弯曲而非笔直的分支,以留出周围空间使得计算域内各个大涡旋得以发展,此时计算域内速度明显上升,目标函数值明显下降,对流传热在总传热中占据明显比重。当 Gr 进一步从 1.7×10^4 增加至 1.2×10^5 时,优化结构也进一步呈现收缩趋势以加速流体流动,计算域内流体速度上升,目标值下降,此时传热完全转变为对流主导。综上,随着 Gr 增加,传热随着空气对流的加强得以不断强化,对于优化结构而言,需要不断收缩以适应计算域内流体涡旋发展。由此可知,所得优化结构在不同的传热主导机制下呈现出完全不同的形态特征,且具有鲜明的物理意义。值得指出的是,虽然本文中散热器是由可渗透的金属泡沫制成,但从图 5(a)中 $z=10 \sim 20$ 时的低流速可知,由于本文中金属泡沫渗透率较低,实际上流体难以穿透大片区域的金属泡沫。尽管如此,金属泡沫高导热系数带来的强化传热效果依然很好。由图 3~图 4 还可知,对于给定的参考结构,计算域内的流体流速同样随着 Gr 增加而不断增加,传热主导机制也逐渐由导热传热向对流传热转换,因而散热效果明显增强。进一步由表 1 及图 5(b)可知,参考结构 2 的散热性能始终比参考结构 1 要好,但始终比优化结构差。

为了定量评估优化散热器结构的强化传热效果,引入冷壁面的平均努塞尔数 $Nu_{ave}^{[22]}$,定义如下

$$Nu_{ave} = \frac{h \int_{X_0} S dX}{k_f(T_s - T_0)A} \tag{38}$$

式中: k_f 为流体导热系数; A 为冷壁面的总面积。

由上式可知,在优化问题中设置最小化平均温度 T_s ,本质上等价于最大程度强化换热(最大化 Nu_{ave})。将式(38)统计得到的 Nu_{ave} 列于表 2,其中 E 表示优化结构相对于参考结构 2 的 Nu_{ave} 的提升百分比,用于定量评估优化结构的强化传热效果。由表 2 可见,相较于参考结构 2,优化结构可将传热效率至少提高 29.7%,相较于参考结构 1 的提升幅度则更大。这种强化传热效果可以解释如下,当 Gr 较低时,优化结构主要通过形成复杂的树枝状结构,尽可能地将高导热系数的金属泡沫分支伸向冷壁面,以降低发热元件与冷壁面间的导热热阻。此时,由于简单的金属泡沫方块和开槽金属泡沫块在空间

中的延伸宽度和高度均不如优化结构,因此散热性能不如优化结构。但随着 Gr 增加,优化结构不断收缩。实际上,当 Gr 增加至 1.2×10^5 时,优化结构在空间中的延伸宽度已经和开槽金属泡沫基本相当。此时,优化结构实现强化传热的机理不再是简单地依靠拓宽散热器空间延伸宽度和高度来强化导热,而是依靠分支结构和中心空心结构的配合来优化流动进而强化对流传热。实际上,相较于整块的金属泡沫方块,开槽金属泡沫块具有更好散热效果的原因就在于开槽金属泡沫的泡沫块间存在可供流体受热后加速的纯流体区,这使得单位时间内有更多流体能更充分地与金属泡沫换热,获得更强的换热效果。而优化散热器结构则在开槽金属泡沫的基础上进一步优化了金属泡沫和纯流体区的分布,从而带来更好的流体加速效果,也就获得了更强的散热能力。这种优化的主要特征为:在树枝状或者花朵状优化结构中,由金属泡沫树枝或花瓣包围而形成了热源正上方的空心区域,使得与树枝或花瓣接触后受热加速的流体能在其中畅通无阻地流动,从而加快了流体在发热元件与冷壁面间循环的速度,提升了换热效率。这种周围密、中心疏的翅片分布已被证实能有效强化自然对流传热^[14],而在优化结构中也存在此种类似结构,进一步验证了优化所得结构的合理性。此外,由表 2 可见,强化传热提升百分比并不随 Gr 的增加而单调增加,而是在高 Gr 时有所回落。这是因为随着 Gr 增加,参考结构和优化结构的换热均会增强,而强化传热提升百分比能否增加取决于二者增强的相对比例,因而其数值未必随 Gr 单调增加。

表 2 不同 Gr 下拓扑优化结构和参考结构的冷壁面平均努塞尔数及提升百分比

Table 2 Average Nusselt number at the cold walls of the topologically optimized designs and reference designs at different Gr and the heat transfer enhancement

Gr	Nu_{ave}			$E/\%$
	优化结构	参考结构 1	参考结构 2	
2.4×10^2	0.631	0.416	0.487	29.7
2.3×10^3	0.652	0.432	0.494	31.9
1.7×10^4	0.895	0.580	0.628	42.5
1.2×10^5	1.229	0.814	0.919	33.8

值得指出的是,本文聚焦单一金属泡沫材料散热器的结构设计,但在自然对流系统的多孔介质散

热器拓扑优化中,多孔介质材料的底层微结构(单胞结构)可选用不同形式,相关的有效输运系数等可以通过孔尺度模拟获得。关于不同单胞结构、不同底层孔隙率及不同多孔材料体积填充率等对优化结构的影响,感兴趣的读者可以参考课题组近期的多尺度拓扑优化工作^[30]。

4 结论与展望

本文发展了基于格子 Boltzmann 方法和水平集方法的三维拓扑优化方法,用于优化由金属泡沫制成的散热器结构。首先,介绍了用于求解多孔介质内流动和传热的格子 Boltzmann 模型及相关边界格式;然后,介绍了基于反应-扩散方程的水平集方法及相关的材料物性插值格式;最后,给出了相应的伴随格子 Boltzmann 模型及梯度计算式。采用上述发展的拓扑优化方法,对底部放置发热元件的方腔内自然对流过程进行拓扑优化,获得了 4 个特征 Gr 下的优化散热器结构,结合 2 类参考结构定量评估了优化结构的强化传热性能,分析了相关的强化换热机理,得到以下主要结论。

(1)采用的格子 Boltzmann 方法具有计算效率高、并行性好、处理复杂界面能力强等优点,基于此发展的伴随格子 Boltzmann 模型同样具备上述优点,这使得针对复杂多物理场的大规模三维拓扑优化结构设计成为可能。基于此,本文实现了金属泡沫散热器的三维拓扑优化结构设计。

(2)观察不同 Gr 下的优化结构可以发现,随着 Gr 增加,计算域内的流体流速显著增加,发热元件及散热器本身的温度均有明显下降,散热主导机制由热传导转变为热对流,优化结构随之由伸展的树枝状向收缩的花朵状结构变化,以留出更多空间使得流动涡旋的发展更加充分。

(3)选用金属泡沫方块结构和带有开槽的金属泡沫块结构作为参考结构,与优化设计结构进行对比研究后发现,拓扑优化通过形成分支结构和中心空心结构的配合以优化流动进而强化对流传热。相较于 2 种参考结构,拓扑优化结构可使散热效率至少提升 29.7%,表现出了优异的散热性能。

本文为金属泡沫散热器的优化设计提供了新方法和新见解,也为新一代轻质高效多孔介质结构优化设计提供了理论指导。后续研究将集中在更加复杂的多尺度多物理场耦合输运过程的多孔介质结构优化理论方法和应用实践等方面,如考虑电池内流动-扩散-反应的多孔电极结构拓扑优化。

参考文献:

- [1] ZHAO Changying. Review on thermal transport in high porosity cellular metal foams with open cells [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2012, 55(13/14): 3618-3632.
- [2] MAHDI H, LOPEZ P J R, FUENTES A, et al. Thermal performance of aluminium-foam CPU heat exchangers [J]. *International Journal of Energy Research*, 2006, 30(11): 851-860.
- [3] 朱继宏,周涵,王创,等. 面向增材制造的拓扑优化技术发展现状与未来 [J]. *航空制造技术*, 2020, 63(10): 24-38.
ZHU Jihong, ZHOU Han, WANG Chuang, et al. Status and future of topology optimization for additive manufacturing [J]. *Aeronautical Manufacturing Technology*, 2020, 63(10): 24-38.
- [4] 吴璇,陈群. 基于不动点迭代的自然对流热沉拓扑优化 [J]. *工程热物理学报*, 2020, 41(9): 2241-2246.
WU Xuan, CHEN Qun. Topology optimization of natural convection heat sink based on fixed point method [J]. *Journal of Engineering Thermophysics*, 2020, 41(9): 2241-2246.
- [5] 吴璇,陈群. 基于伪密度的对流换热热沉结构拓扑优化 [J]. *工程热物理学报*, 2022, 43(3): 763-769.
WU Xuan, CHEN Qun. Topology optimization of convection heat sink based on pseudo-density method [J]. *Journal of Engineering Thermophysics*, 2022, 43(3): 763-769.
- [6] 董馨,刘小民. 微流控芯片通道结构的拓扑优化研究 [J]. *西安交通大学学报*, 2018, 52(6): 143-149.
DONG Xin, LIU Xiaomin. Topology optimization of the channel structure in microfluidic chips [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2018, 52(6): 143-149.
- [7] 董馨,刘小民. 流体拓扑优化的参数选择与分析 [J]. *西安交通大学学报*, 2018, 52(8): 132-138.
DONG Xin, LIU Xiaomin. Selection and analysis of parameters for fluid topology optimization [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2018, 52(8): 132-138.
- [8] BORRVAL T, PETERSSON J. Topology optimization of fluids in stokes flow [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2003, 41(1): 77-107.
- [9] YOON G H. Topological design of heat dissipating structure with forced convective heat transfer [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2010, 24(6): 1225-1233.
- [10] DEDE E M. Optimization and design of a multipass branching microchannel heat sink for electronics cooling [J]. *Journal of Electronic Packaging*, 2012, 134

- (4): 041001.
- [11] ALEXANDERSEN J, AAGE N, ANDREASEN C S, et al. Topology optimisation for natural convection problems [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2014, 76(10): 699-721.
 - [12] ALEXANDERSEN J, SIGMUND O, AAGE N. Large scale three-dimensional topology optimisation of heat sinks cooled by natural convection [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2016, 100: 876-891.
 - [13] COFFIN P, MAUTE K. A level-set method for steady-state and transient natural convection problems [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2016, 53(5): 1047-1067.
 - [14] LI Hao, KONDOH T, JOLIVET P, et al. Optimum design and thermal modeling for 2D and 3D natural convection problems incorporating level set-based topology optimization with body-fitted mesh [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2022, 123(9): 1954-1990.
 - [15] CHEN Li, HE An, ZHAO Jianlin, et al. Pore-scale modeling of complex transport phenomena in porous media [J]. *Progress in Energy and Combustion Science*, 2022, 88: 100968.
 - [16] PINGEN G, EVGRAFOV A, MAUTE K. Topology optimization of flow domains using the lattice Boltzmann method [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2007, 34(6): 507-524.
 - [17] KRAUSE M J, THÄTER G, HEUVELINE V. Adjoint-based fluid flow control and optimisation with lattice Boltzmann methods [J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2013, 65(6): 945-960.
 - [18] YAJI K, YAMADA T, YOSHINO M, et al. Topology optimization using the lattice Boltzmann method incorporating level set boundary expressions [J]. *Journal of Computational Physics*, 2014, 274: 158-181.
 - [19] YAJI K, YAMADA T, YOSHINO M, et al. Topology optimization in thermal-fluid flow using the lattice Boltzmann method [J]. *Journal of Computational Physics*, 2016, 307: 355-377.
 - [20] DUGAST F, FAVENNEC Y, JOSSET C. Reactive fluid flow topology optimization with the multi-relaxation time lattice Boltzmann method and a level-set function [J]. *Journal of Computational Physics*, 2020, 409: 109252.
 - [21] LUO Jiwang, CHEN Li, HE An, et al. Topology optimization of convective heat transfer by the lattice Boltzmann method [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2023, 95(3): 421-452.
 - [22] LUO Jiwang, CHEN Li, KE Hanbing, et al. Three-dimensional topology optimization of natural convection using double multiple-relaxation-time lattice Boltzmann method [J]. *Applied Thermal Engineering*, 2024, 236: 121732.
 - [23] TANABE Y, YAJI K, USHIJIMA K. Topology optimization using the lattice Boltzmann method for unsteady natural convection problems [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2023, 66(5): 103.
 - [24] LUO Jiwang, CHEN Li, XIA Yang, et al. Topology optimization of natural convection using porous metal foam based on the adjoint lattice Boltzmann method and level set method [J]. *Computers & Fluids*, 2023, 265: 106007.
 - [25] GUO Zhaoli, ZHAO Tianshou. Lattice Boltzmann model for incompressible flows through porous media [J]. *Physical Review E*, 2002, 66(3): 036304.
 - [26] CHEN Sheng, YANG Bo, ZHENG Chuguang. Simulation of double diffusive convection in fluid-saturated porous media by lattice Boltzmann method [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2017, 108: 1501-1510.
 - [27] 曲东越, 张海兵, 徐建安, 等. 基于改进水平集结构拓扑优化方法的理论研究 [J]. *应用力学学报*, 2019, 36(4): 895-900.
 - QU Dongyue, ZHANG Haibing, XU Jianan, et al. Theoretical research of structure topology optimization based on the level set method [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2019, 36(4): 895-900.
 - [28] ALEXANDERSEN J, SIGMUND O, MEYER K E, et al. Design of passive coolers for light-emitting diode lamps using topology optimisation [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2018, 122: 138-149.
 - [29] BHATTACHARYA A, MAHAJAN R L. Metal foam and finned metal foam heat sinks for electronics cooling in buoyancy-induced convection [J]. *Journal of Electronic Packaging*, 2006, 128(3): 259-266.
 - [30] LUO Jiwang, CHEN Li, XIA Yang, et al. Three-dimensional multi-scale topology optimization of porous heat sink with predetermined unit cells for natural convection heat transfer [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2024, 225: 125398.

(编辑 李慧敏)